Rappel de du modèle de Maxwell (appliqué aux antennes et aux microondes)

Anja K Skrivervik, STI-IEL-MAG

Anja.skrivervik@epfl.ch

École polytechnique fédérale de Lausanne

Equations de Maxwell
Domaine temporel

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{D}(t,\boldsymbol{r}) = \rho(t,\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{\partial \boldsymbol{D}(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} + \boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{r}) \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}) = 0$$

$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r})$ champ électrique

$\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{r})$ champ magnétique

$\boldsymbol{D}(t,\boldsymbol{r})$ champ de déplacement

$\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r})$ champ d'induction

$\rho(t,\boldsymbol{r})$ densité de charge

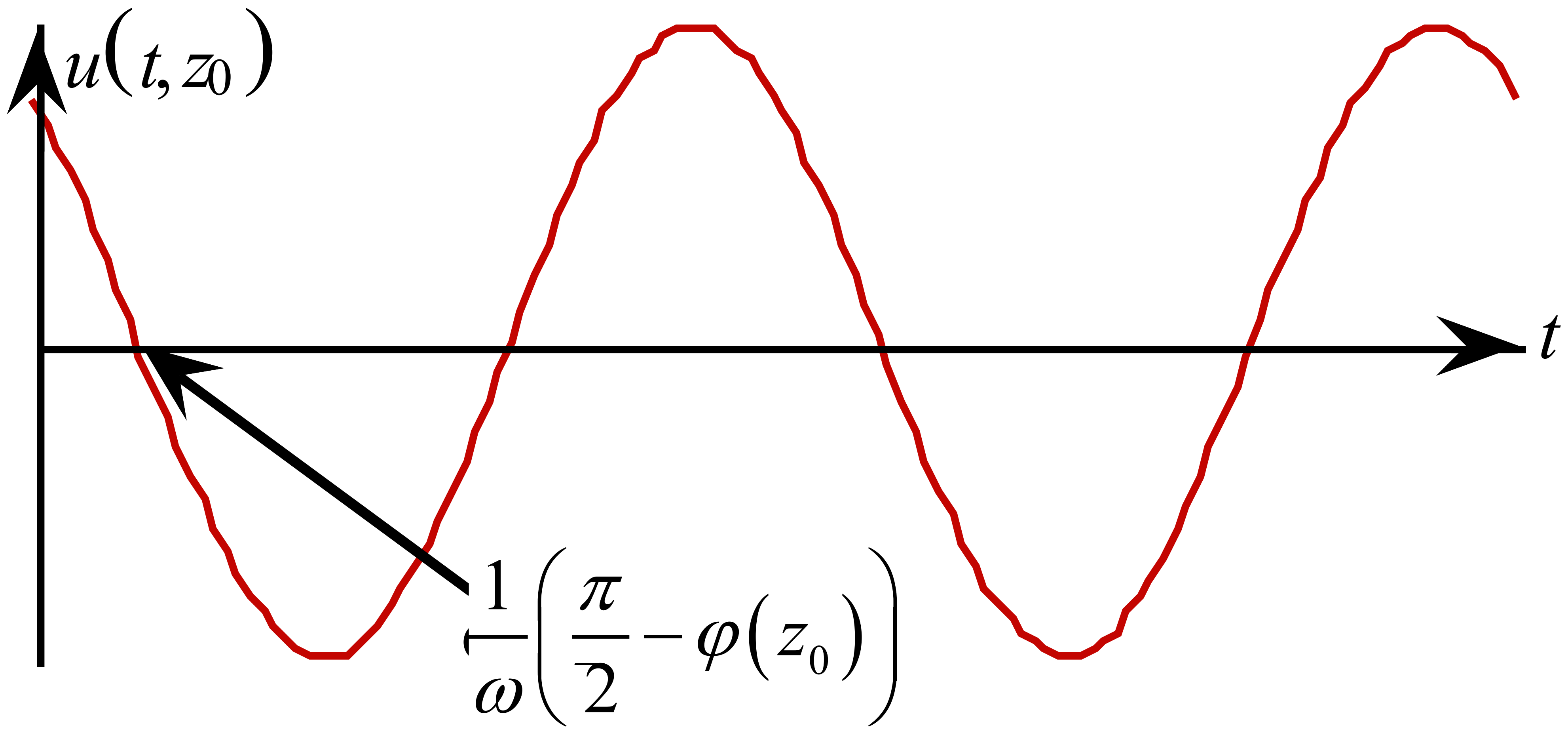
$\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{r})$ densité de courant

Equations de Maxwell
Domaine temporel

On obtient l'équation de continuité en prenant la divergence de la 3ème équation et en utilisant la 2ème:

$$\frac{\partial \rho(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{r}) = 0$$

Domaine fréquentiel: phaseurs



$$u(t,z)=\sqrt{2}U(z)\cos\left[\omega t+\varphi(z)\right]$$

$$\omega=2\pi f$$

mais nous pouvons aussi écrire

$$u(t,z)=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\underline{U}(z)e^{j\omega t}\right]$$

$$\underline{U}(z)=U(z)e^{j\varphi(z)}$$

et puisque $\mathrm{Re}[z]=\dfrac{z+z^*}{2}$

$$u(t,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\underline{U}(z)e^{j\omega t}+\underline{U}^*(z)e^{-j\omega t}\right]$$

Introduction aux microondes et antennes

Domaine fréquentiel: phaseurs

$$\frac{\partial u(t,u)}{\partial t} = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\underline{U}(z)\frac{de^{j\omega t}}{dt}\right] = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\, j\omega \underline{U}(z)e^{j\omega}\right]$$

La dérivation par rapport au temps, dans le domaine temporel, correspond à une multiplication par jω dans le domaine fréquentiel

Domaine fréquentiel

Valeur moyenne de u^2, énergie électrique moyenne

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} u(t,z)u(t,z)\,dt =$$

$$\frac{1}{2T}\int_t^{t+T}\left[\underline{U}(z)e^{j\omega t}+\underline{U}^*(z)e^{-j\omega t}\right]\left[\underline{U}(z)e^{j\omega t}+\underline{U}^*(z)e^{-j\omega t}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2T}\int_t^{t+T}\left[\underline{U}^2(z)e^{2j\omega t}+\underline{U}^{*2}(z)e^{-2j\omega t}+2\underline{U}(z)\underline{U}^*(z)\right]dt$$

mais $\displaystyle\int_t^{t+T} e^{\pm 2j\omega t}dt=\pm\frac{1}{2j\omega}e^{\pm 2j\omega t}\Big|_t^{t+T}=\pm\frac{1}{2j\omega}\left[e^{\pm 2j\omega t}-e^{\pm 2j\omega t}\right]=0$ car $\omega T=2\pi$

il reste donc : $\langle u^2(t,z)\rangle=\underline{U}(z)\underline{U}^*(z)=\left|\underline{U}(z)\right|^2$

Domaine fréquentiel
valeur moyenne de la puissance

dans la théorie des lignes de transmission, la puissance au temps t est donnée par $p(t,z)=u(t,z)i(t,z)$

La puissance moyenne est donc donnée par

$$\langle p(t,z)\rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u(t,z)i(t,z)\,dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_t^{t+T}\left[\underline{U}(z)e^{j\omega t}+\underline{U}^*(z)e^{-j\omega t}\right]\left[\underline{I}(z)e^{j\omega t}+\underline{I}^*(z)e^{-j\omega t}\right]dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_t^{t+T}\underline{U}(z)\underline{I}(z)e^{2j\omega t}\,dt+\frac{1}{2T}\int_t^{t+T}\underline{U}^*(z)\underline{I}^*(z)e^{-2j\omega t}\,dt$$

$$+\frac{1}{2T}\int_t^{t+T}\left[\underline{U}(z)\underline{I}^*(z)+\underline{U}^*(z)\underline{I}(z)\right]dt$$

Les 2 premières intégrales sont nulles, il reste donc

$$\langle p(t,z)\rangle = \frac{1}{2}\left[\underline{U}(z)\underline{I}^*(z)+\underline{U}^*(z)\underline{I}(z)\right] = \mathrm{Re}\left[\underline{U}(z)\cdot\underline{I}^*(z)\right] = \mathrm{Re}\left[\underline{S}(z)\right] = P(z)$$

Domaine fréquentiel: équations de Maxwell

les équations de Maxwell deviennent

$$\nabla \times \underline{\mathrm{E}}(\boldsymbol{r}) = -j\omega \underline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) = j\omega \underline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r}) + \underline{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r}) = \underline{\rho}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r}) = 0$$

et l'équation de continuité

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}) + j\omega \underline{\rho}(\boldsymbol{r}) = 0$$

Changement de notation

A partir de ce slide, les phaseurs ne seront plus soulignés, le contexte étant suffisant pour déterminer leur qualité de phaseur

Milieux linéaires et isotropes

Dans un milieu linéaire et isotrope, nous avons vu que

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Ce sont les relations constitutives

ε et μ sont en général complexes et définissent le milieu. Leur parties imaginaires représentent les pertes dans le milieu.

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

$$\mu = \mu' - j\mu''$$

Le signe "–" vient de la causalité

Propriétés électriques et magnétiques du vide

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c_0 = \text{ vitesse de la lumière dans le vide} = 3 \cdot 10^8 \left[m / s \right]$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 = \text{ impédance du vide} = 120\pi$$

$$\mu_0 = \text{perméabilité du vide} = 4\pi 10^{-7}$$

$$\varepsilon_0 = \text{permittivité du vide} = 8.854 \cdot 10^{-12}$$

Milieux linéaires et isotropes

Finalement, on obtient

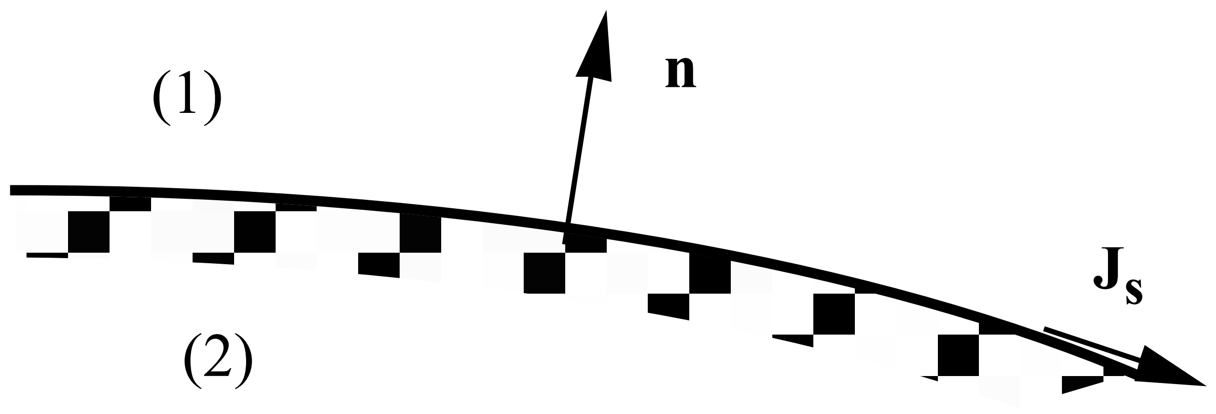
$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = j\omega\varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho}{\varepsilon}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0$$

Conditions aux limites



n est le vecteur unitaire normal à la surface allant du milieu 2 au milieu 1.
J_s est un éventuel courant de surface [A/m]

$$\boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1\right)=0$$

$$\boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1\right)=\boldsymbol{J}_s$$

Energies électrique et magnétique

valeur moyenne de la densité d'énergie électrique:

$$w_e = \varepsilon \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}^* \quad \left[J / m^3 \right]$$

valeur moyenne de la densité d'énergie magnétique:

$$w_m = \mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H}^* \quad \left[J / m^3 \right]$$

Vecteur de Poynting: valeur moyenne du flux de puissance

$$S = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \qquad \left[W / m^2 \right]$$

Théorème de Poynting

En utilisant les équations de Maxwell, en intégrant sur un volume v entouré d'une surface s, on obtient le Théorème de Poynting

$$\int_s ds\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{n} + j\omega\int_v dv\left(w_e + w_m\right) = -\int_v dv\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$$

Les potentiels: potentiel vecteur magnétique

Considérons l'équation de Maxwell sur l'induction magnétique

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$$

or $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \equiv 0$

On peut donc écrire $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ où **A(r)** est appelé le vecteur potentiel mangétique. **A(r)** n'est pas unique on pourrait le remplacer par $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \nabla\Phi$ où Φ est une fonction arbitraire

Les potentiels: potentiel scalaire électrique

Nous pouvons écrire

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -j\omega \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -j\omega \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

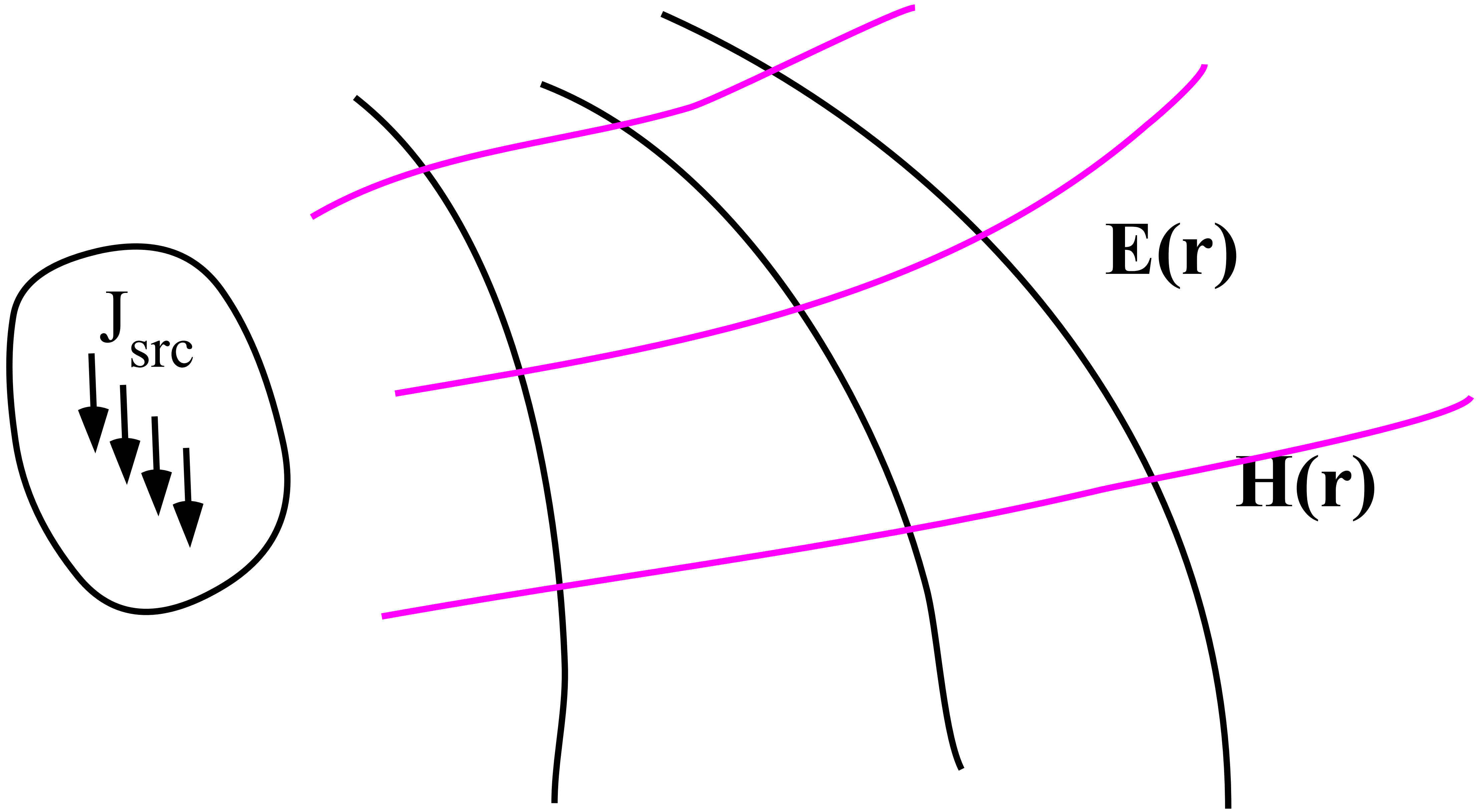
Donc

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + j\omega \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + j\omega \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right) = 0$$

comme le rotationnel d'un gradient est toujours nul, nous pouvons définir V tel que

$$-\nabla V(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + j\omega \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

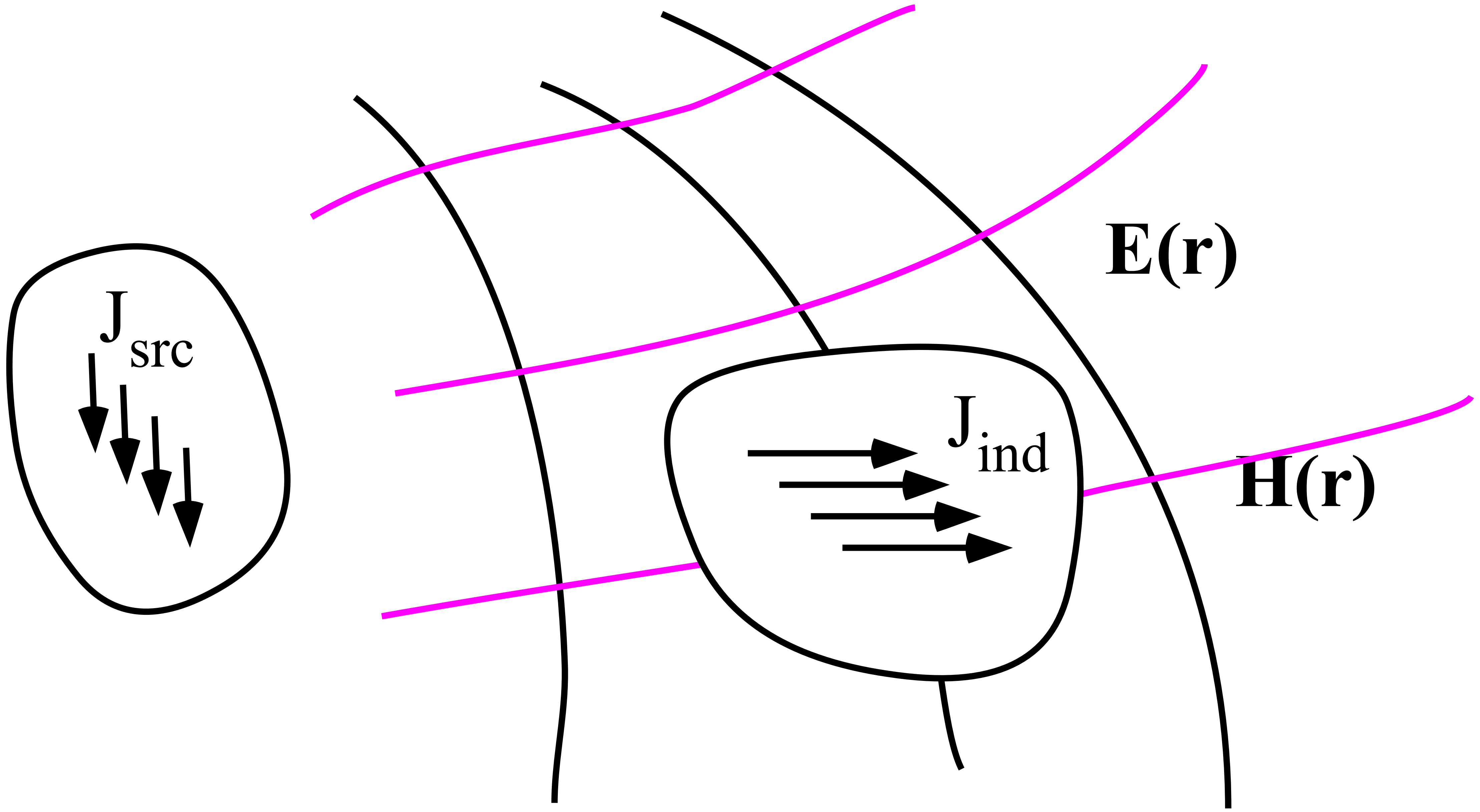
Courants source et courants diffractés



$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-j\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{J}_{src}(\boldsymbol{r})$$

Courants source et courants diffractés



$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = j\omega\varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}_{tot}(\boldsymbol{r})$$

Courants sources et courants diffractés

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}_{tot}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}_{ind}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}_{src}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}_{src}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = (j\omega\varepsilon + \sigma)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}_{src}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = j\omega\left(\varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}_{src}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = j\omega\varepsilon_T\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}_{src}(\boldsymbol{r})$$

$\varepsilon_T = \left(\varepsilon - j\dfrac{\sigma}{\omega}\right)$ est appelé permittivité globale

pour ne pas alourdir la notation, on va continuer à écrire

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = j\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$$

Courants source et courants diffractés

pour ne pas alourdir la notation, on va continuer à écrire

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = j\omega\varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$$

mais il sera sous entendu que

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{J}_{src}(\boldsymbol{r})$$

$$\varepsilon = \left(\varepsilon' - j\varepsilon'' - j\frac{\sigma}{\omega}\right)$$

Solutions des équations de Maxwell: les équations d'onde

dans une région sans source, nous pouvons écrie

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = j\omega\varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -j\omega\mu \nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \omega^2 \varepsilon\mu \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\right) - \nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 - \nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

et ainsi obtenir l'équation d'onde classique

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad ; \quad k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Pour le champ magnétique, on obtient de manière similaire

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0 \quad ; \quad k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

La polarisation des ondes

L'orientation du champ électrique est appelée polarisation

Elle peut être elliptique, circulaire ou linéaire. En effet, en toute généralité, un champ électrique a la forme suivante au point r:

$$\boldsymbol{E}(t)=\sqrt{2}\left[\boldsymbol{e}_x E_{0x}\cos(\omega t+\varphi_x)+\boldsymbol{e}_y E_{0y}\cos(\omega t+\varphi_y)+\boldsymbol{e}_z E_{0z}\cos(\omega t+\varphi_z)\right]$$

$$\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{E}(0)\cos(\omega t)+\boldsymbol{E}(T/4)\sin(\omega t)$$

avec

$$\boldsymbol{E}(0)=\sqrt{2}\left[\boldsymbol{e}_x E_{0x}\cos(\varphi_x)+\boldsymbol{e}_y E_{0y}\cos(\varphi_y)+\boldsymbol{e}_z E_{0z}\cos(\varphi_z)\right]$$

$$\boldsymbol{E}(T/4)=-\sqrt{2}\left[\boldsymbol{e}_x E_{0x}\sin(\varphi_x)+\boldsymbol{e}_y E_{0y}\sin(\varphi_y)+\boldsymbol{e}_z E_{0z}\sin(\varphi_z)\right]$$

ou en termes de phaseurs : $\boldsymbol{E}(0)=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\boldsymbol{E}\right]$

$$\boldsymbol{E}(T/4)=-\mathrm{Im}\left[\sqrt{2}\boldsymbol{E}\right]$$

La polarisation des ondes

E(0) et **E**(T/4) sont les axes conjugués d'une ellipse. Trois situations sont possibles:

- **E**(0) et **E**(T/4) sont colinéaires, et la polarisation est linéaire:

$$\boldsymbol{E}(0)\times\boldsymbol{E}(T/4)=0$$

$$\left\langle \boldsymbol{E}^2\right\rangle \neq 0$$

- **E**(0) et **E**(T/4) sont orthogonaux et de même longueur, et la polarisation est circulaire:

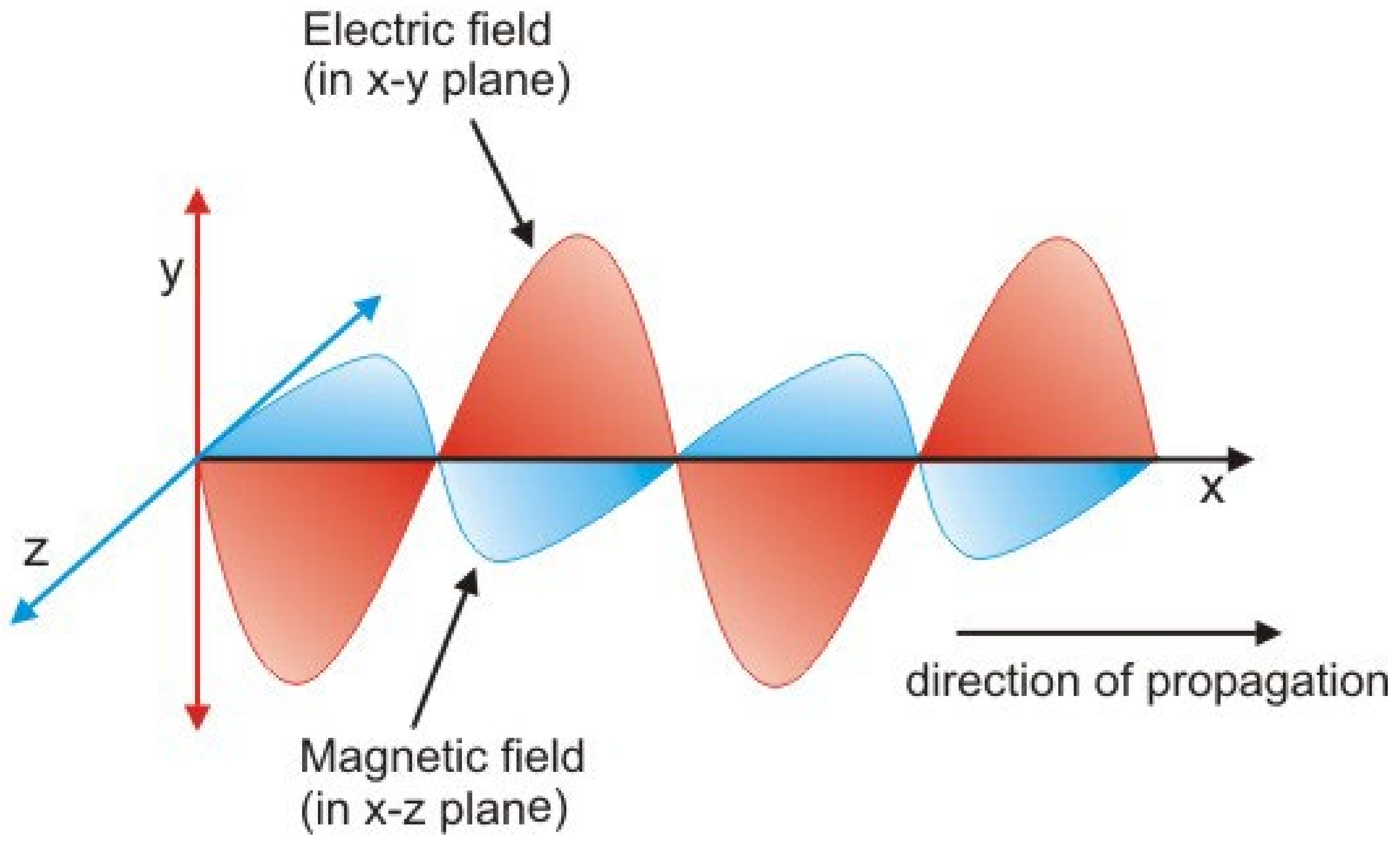
$$\boldsymbol{E}(0)\cdot\boldsymbol{E}(T/4)=0$$

$$\left|\boldsymbol{E}(0)\right|=\boldsymbol{E}(T/4)\neq 0$$

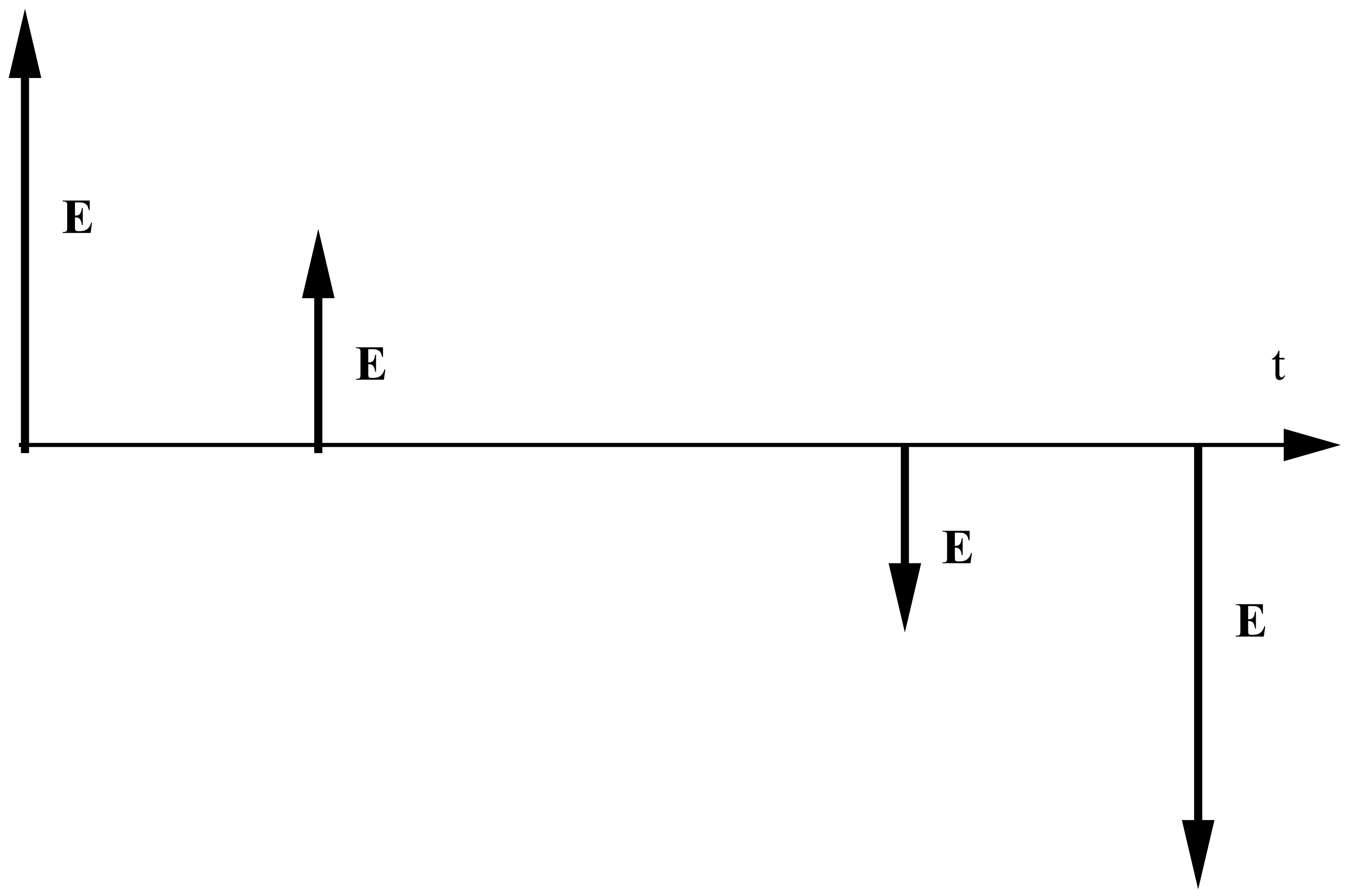
ce qui est équivalent à

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}=0$$

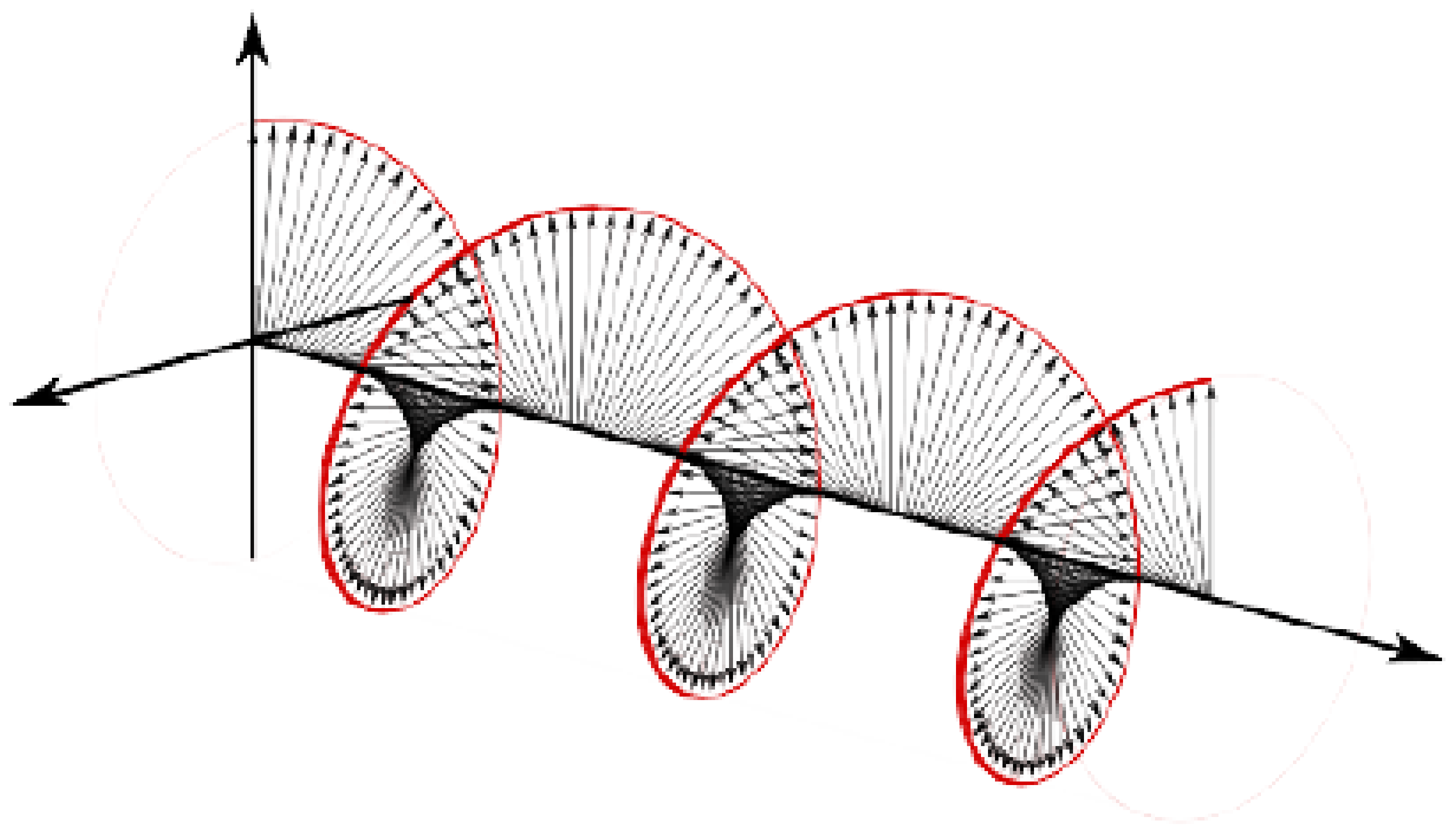
Polarisation linéaire



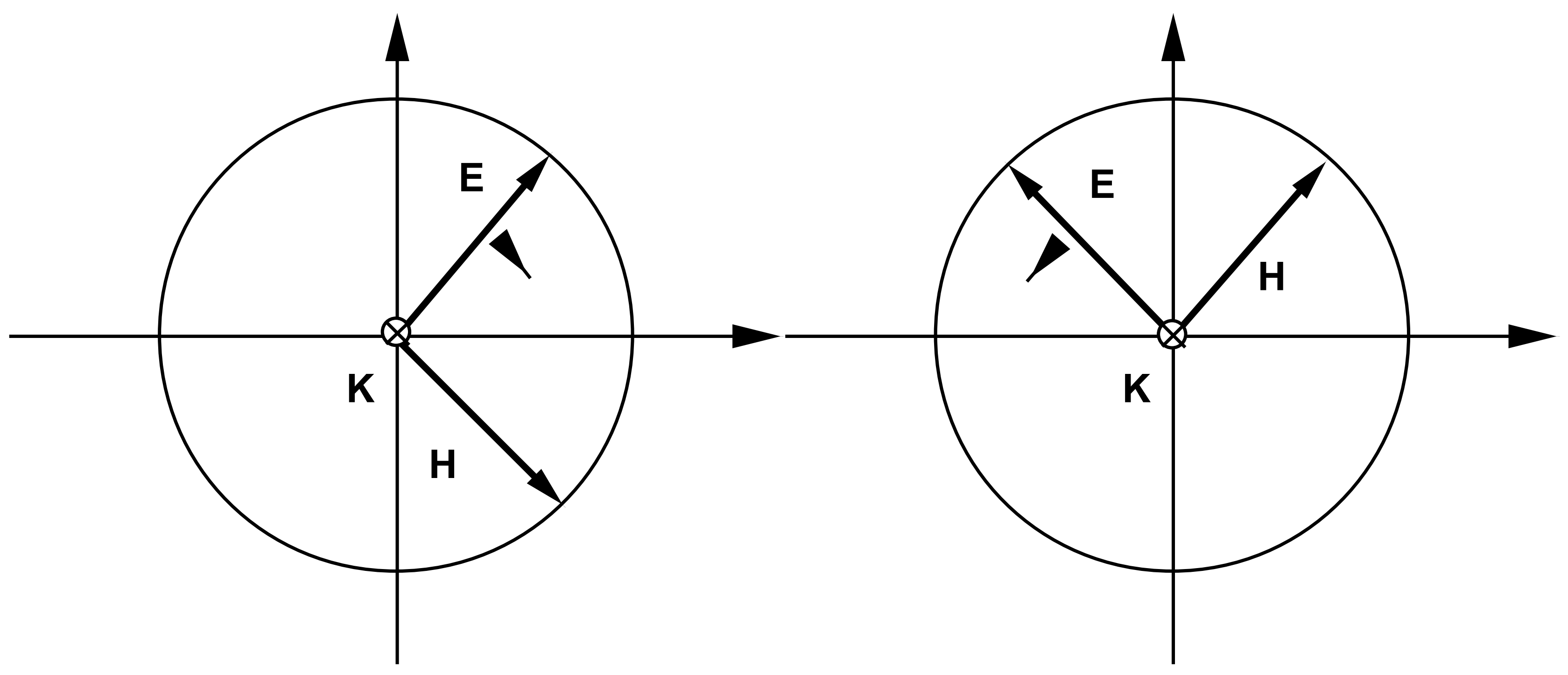
https://www.saburchill.com/physics/chapters2/0040.html



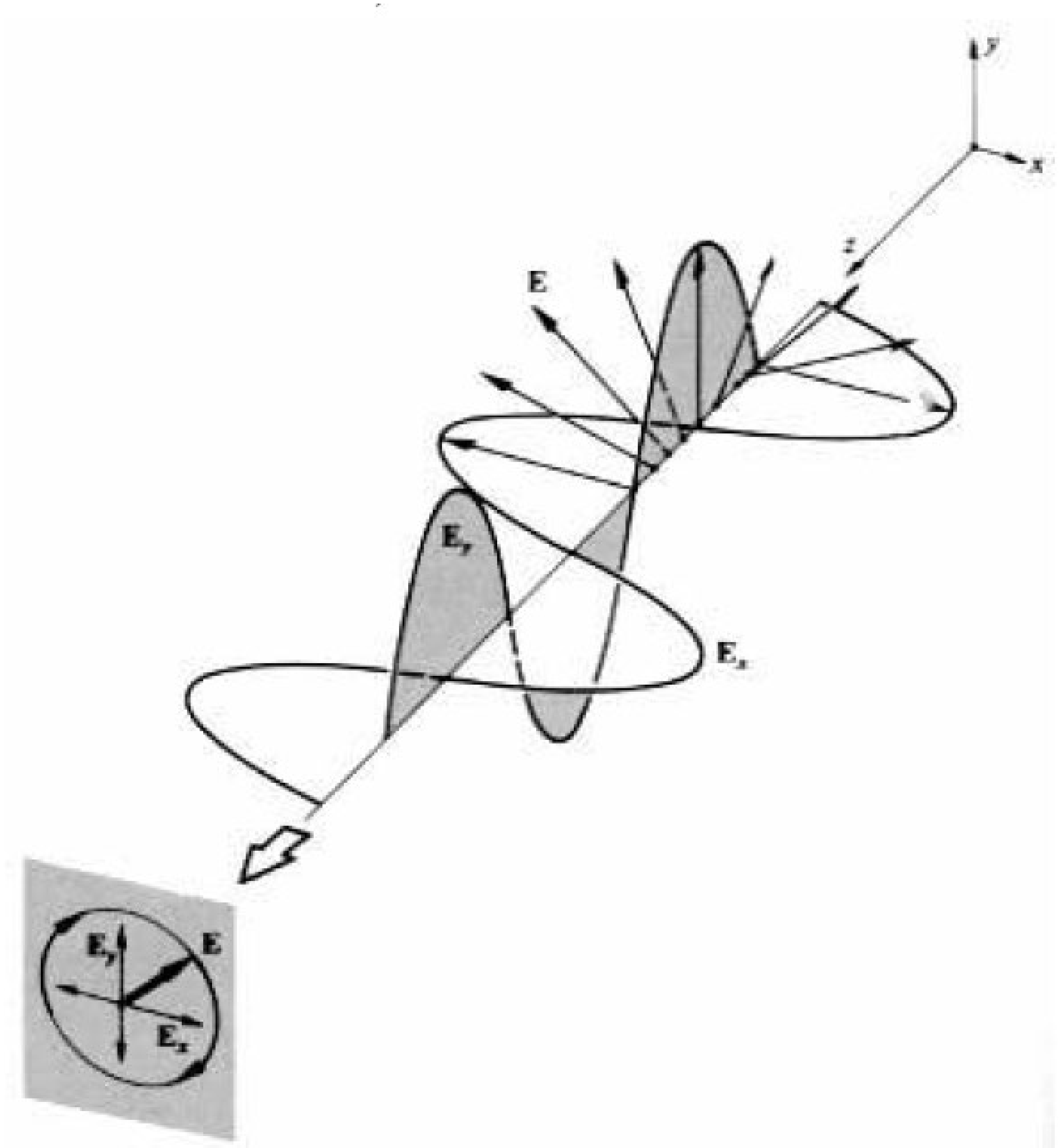
Polarisation circulaire



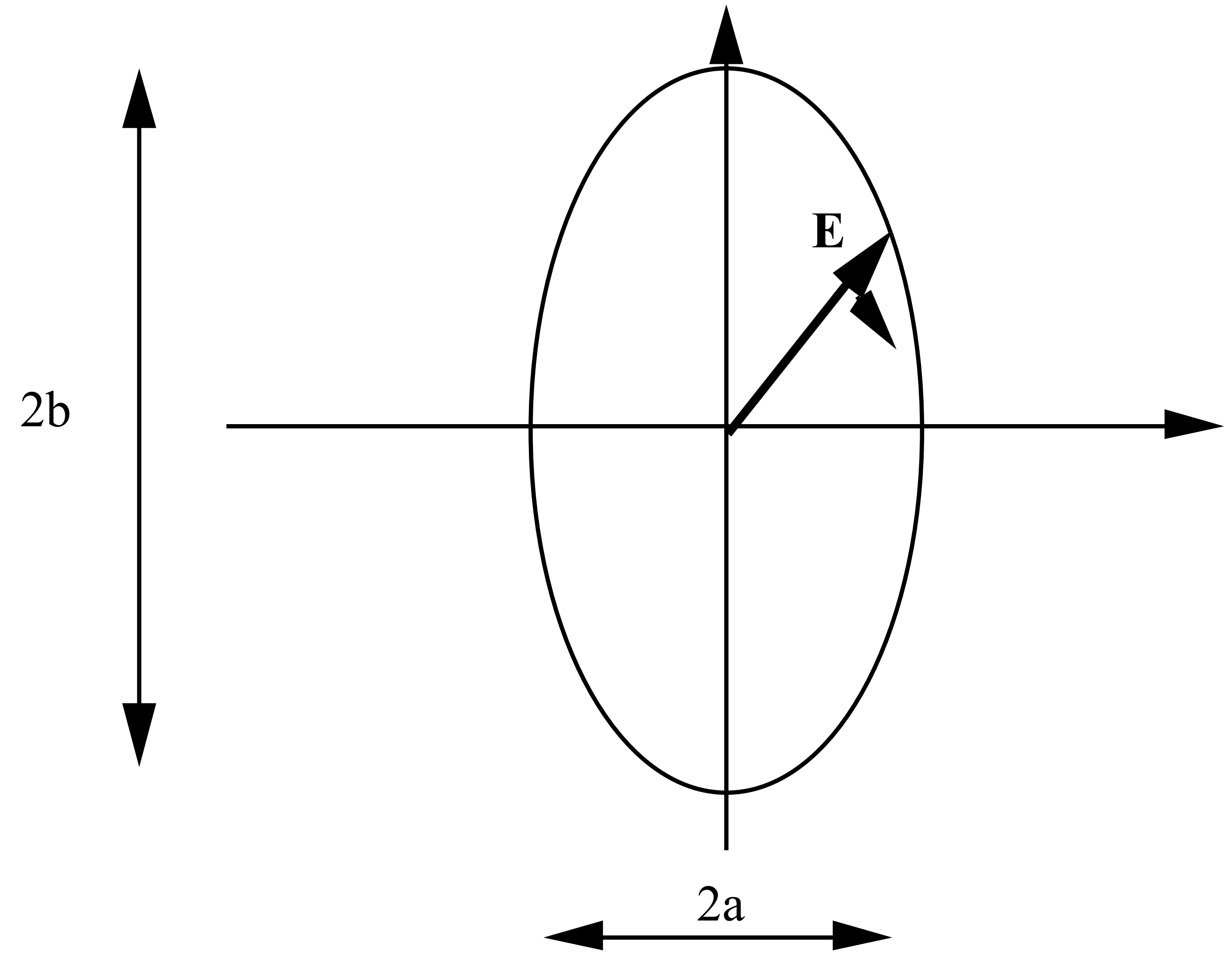
https://en.wikipedia.org/wiki/Circular_polarization



Polarisation elliptique

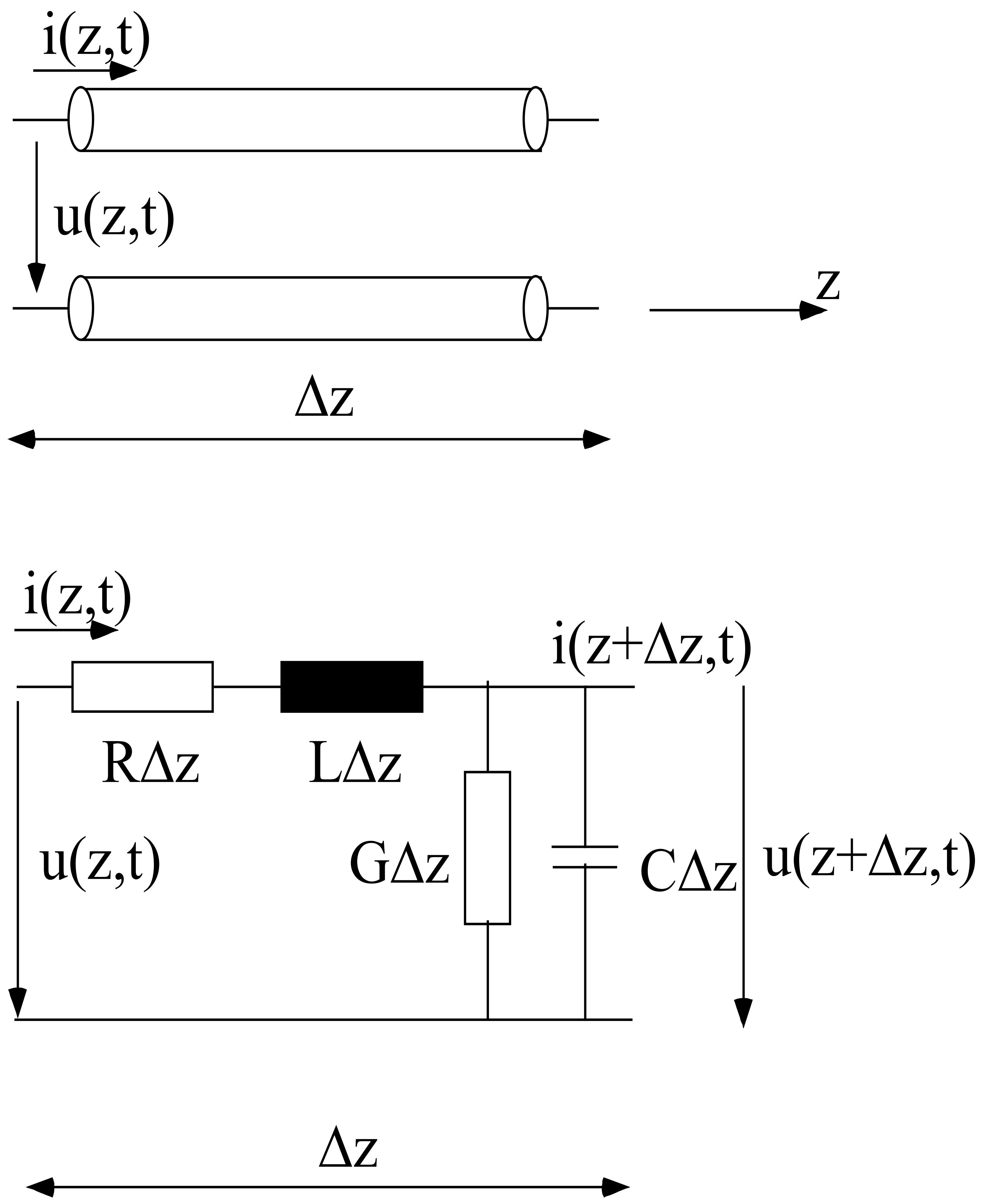


https://nanopdf.com/download/la-lumiere-2_pdf



Lignes de transmission

Modèle incremental (1)



Modèle incremental (2)

Kirchhoff':

$$v(z,t)-R\Delta z i(z,t)-L\Delta z\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}-v(z+\Delta z,t)=0$$

$$i(z,t)-G\Delta z v(z+\Delta z,t)-C\Delta z\frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}-i(z+\Delta z,t)=0$$

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}=-Ri(z,t)-L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}=-Gv(z,t)-C\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

$$\longrightarrow$$

$$\frac{dV(z)}{dz}=-(R+j\omega L)I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz}=-(G+j\omega C)V(z)$$

Modèle incremental (3)

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2}-\gamma^2V(z)=0$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2}-\gamma^2I(z)=0$$

avec

$$\gamma=\alpha+j\beta=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$$

Modèle incremental (4)

Solutions :

$$V(z) = V_0^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} + V_0^- \mathrm{e}^{\gamma z}$$

$$I(z) = I_0^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} + I_0^- \mathrm{e}^{\gamma z}$$

ou :

$$I(z) = \frac{\gamma}{R + j\omega L}\left(V_0^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} - V_0^- \mathrm{e}^{\gamma z}\right)$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_o}\mathrm{e}^{-\gamma z} - \frac{V_o^-}{Z_o}\mathrm{e}^{\gamma z}$$

avec $Z_o = \dfrac{R + j\omega L}{\gamma} = \sqrt{\dfrac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$

Modèle incremental (5)

Longueur d'onde: $\lambda = 2\pi/\beta$

Vitesse de phase: $v_\varphi = dz/dt = \omega/\beta = \lambda f$

Lignes sans pertes

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

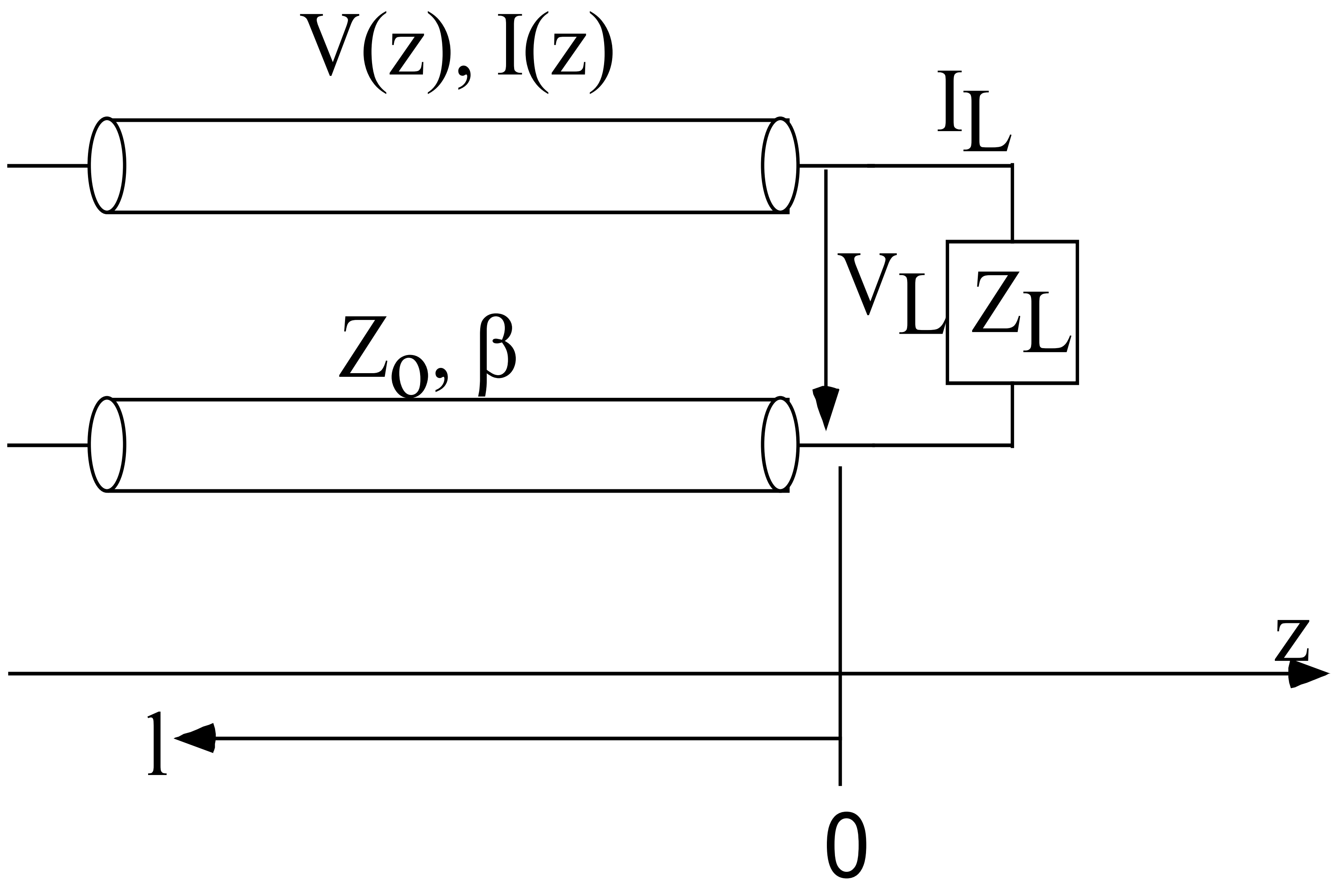
$$V(z) = V_0^+ \, \mathrm{e}^{-j\beta z} + V_0^- \, \mathrm{e}^{j\beta z}$$

$$I(z) = I_0^+ \, \mathrm{e}^{-j\beta z} + I_0^- \, \mathrm{e}^{j\beta z} = \frac{V_0^+}{Z_o} \mathrm{e}^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_o} \mathrm{e}^{j\beta z}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}}$$

$$v_\varphi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Lignes terminées (1)



$$Z_L = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-} Z_0$$

$$V_0^- = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} V_0^+$$

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}$$

Lignes terminées (2)

$$V(z) = V_0^+\left(e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}\right)$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_o}\left(e^{-j\beta z} - \Gamma e^{j\beta z}\right)$$

$$P_{av} = \mathrm{Re}\left[V(z) I^*(z)\right] = \frac{\left|V_o^+\right|^2}{Z_o}\mathrm{Re}\left[1 - \Gamma^* e^{-2j\beta z} + \Gamma \;\; e^{2j\beta z} - |\Gamma|^2\right]$$

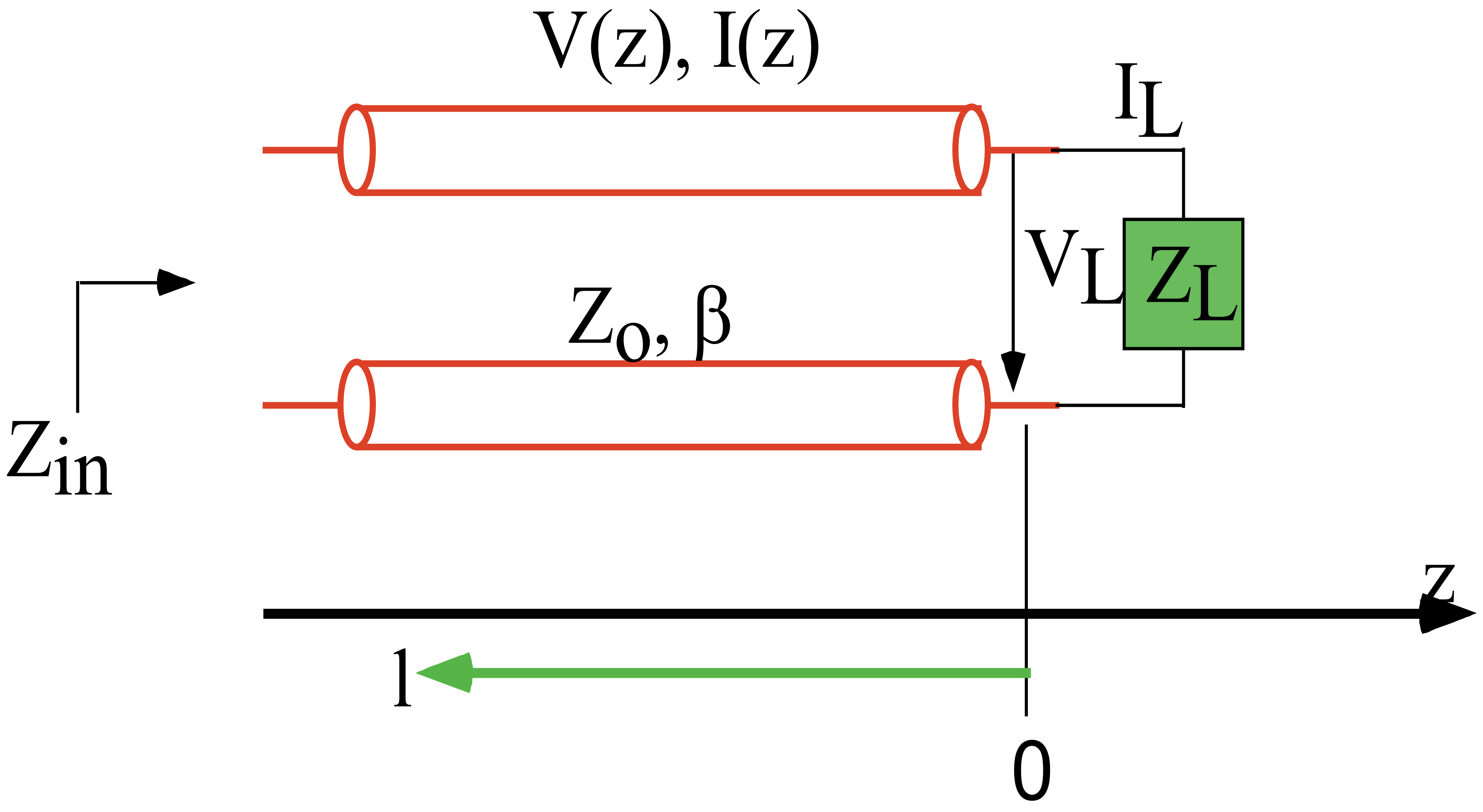
$$\boxed{P_{av} = \mathrm{Re}\left[V(z) I^*(z)\right] = \frac{\left|V_o^+\right|^2}{Z_o}\left(1 - |\Gamma|^2\right)}$$

Introduction aux microondes et antennes

Lignes terminées (3)

Pertes de désadaptation: $RL = -20\log_{10}|\Gamma|\ \text{dB}$

Lignes terminées: Impédance d’entrée



$$Z_{in} = \frac{V(-l)}{I(-l)}$$

$$= Z_o \frac{V_0^+\left(e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l}\right)}{V_0^+\left(e^{j\beta l} - \Gamma e^{-j\beta l}\right)}$$

$$= Z_o \frac{1+\Gamma e^{-j2\beta l}}{1-\Gamma e^{-j2\beta l}}$$

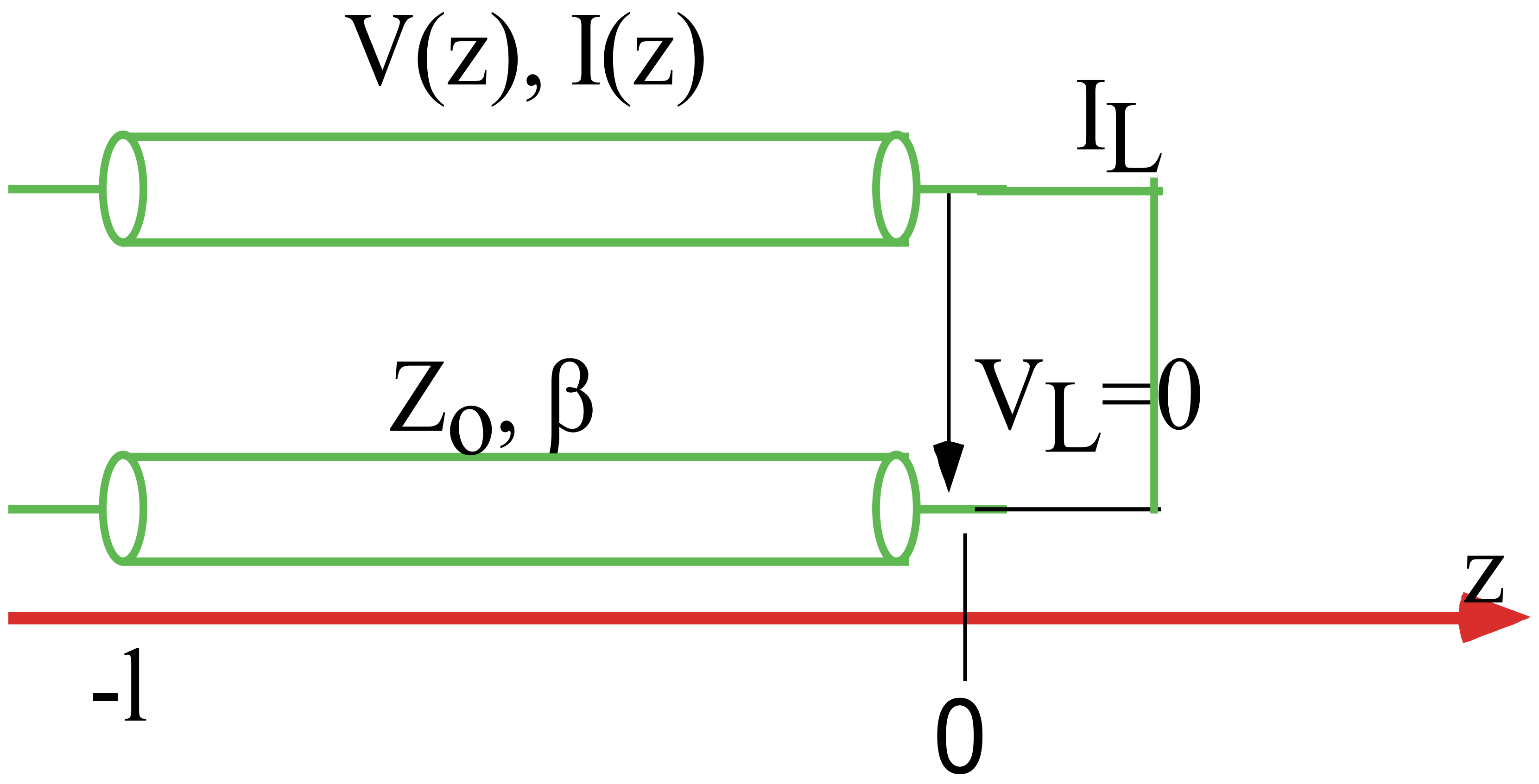
Lignes terminées: Impédance d'entrée

Donc, un utilisant $\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o}$

$$Z_{in} = Z_o \frac{(Z_L + Z_o)e^{j\beta l} + (Z_L - Z_o)e^{-j\beta l}}{(Z_L + Z_o)e^{j\beta l} - (Z_L - Z_o)e^{-j\beta l}} = Z_o \frac{Z_L \cos\beta l + jZ_o \sin\beta l}{Z_0 \cos\beta l + jZ_L \sin\beta l}$$

$$= Z_o \frac{Z_L + jZ_o \tan\beta l}{Z_o + jZ_L \tan\beta l}$$

Ligne terminée par un court circuit

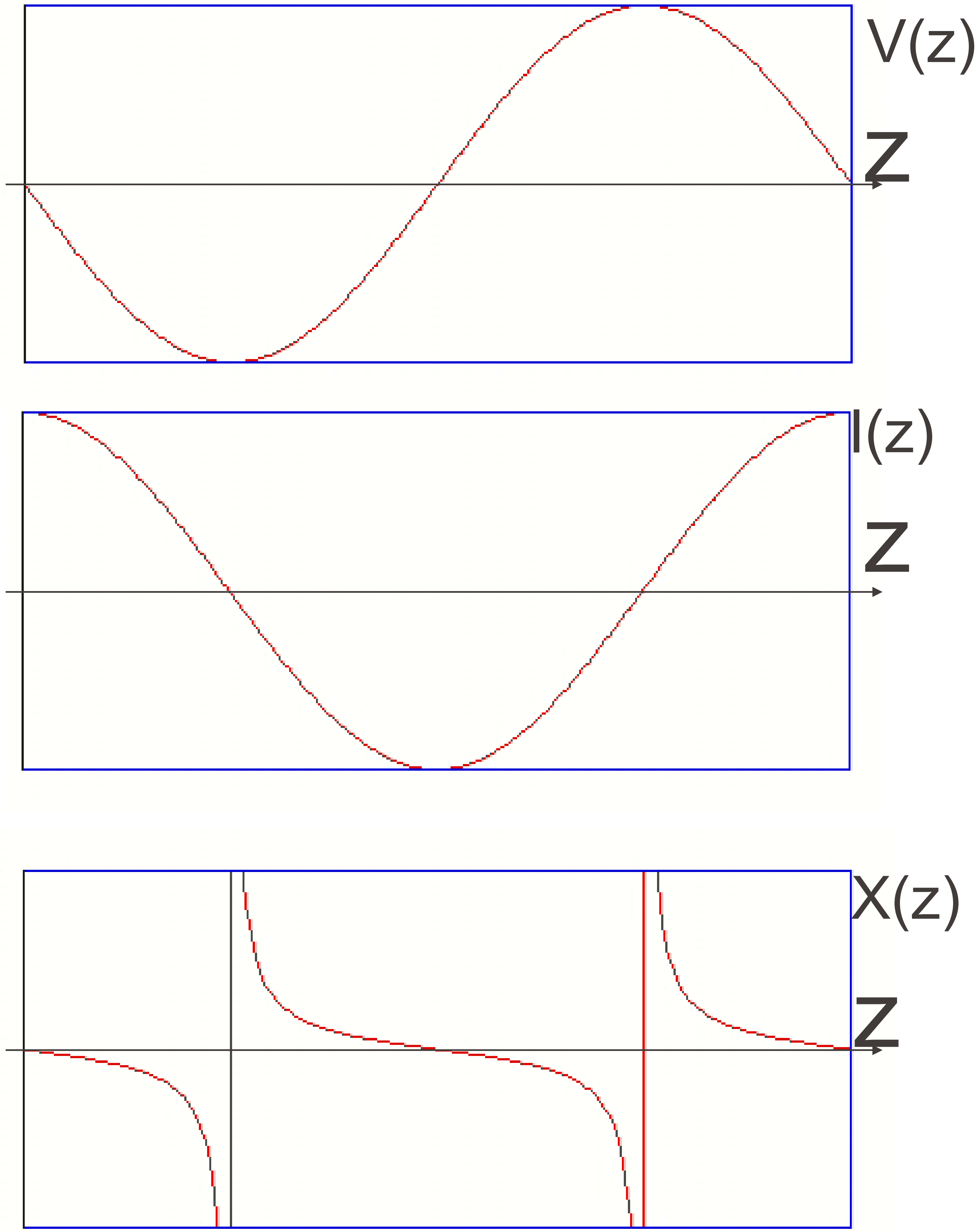


$$V(z) = V_0^+\left(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}\right) = -2jV_0^+ \sin\beta z$$

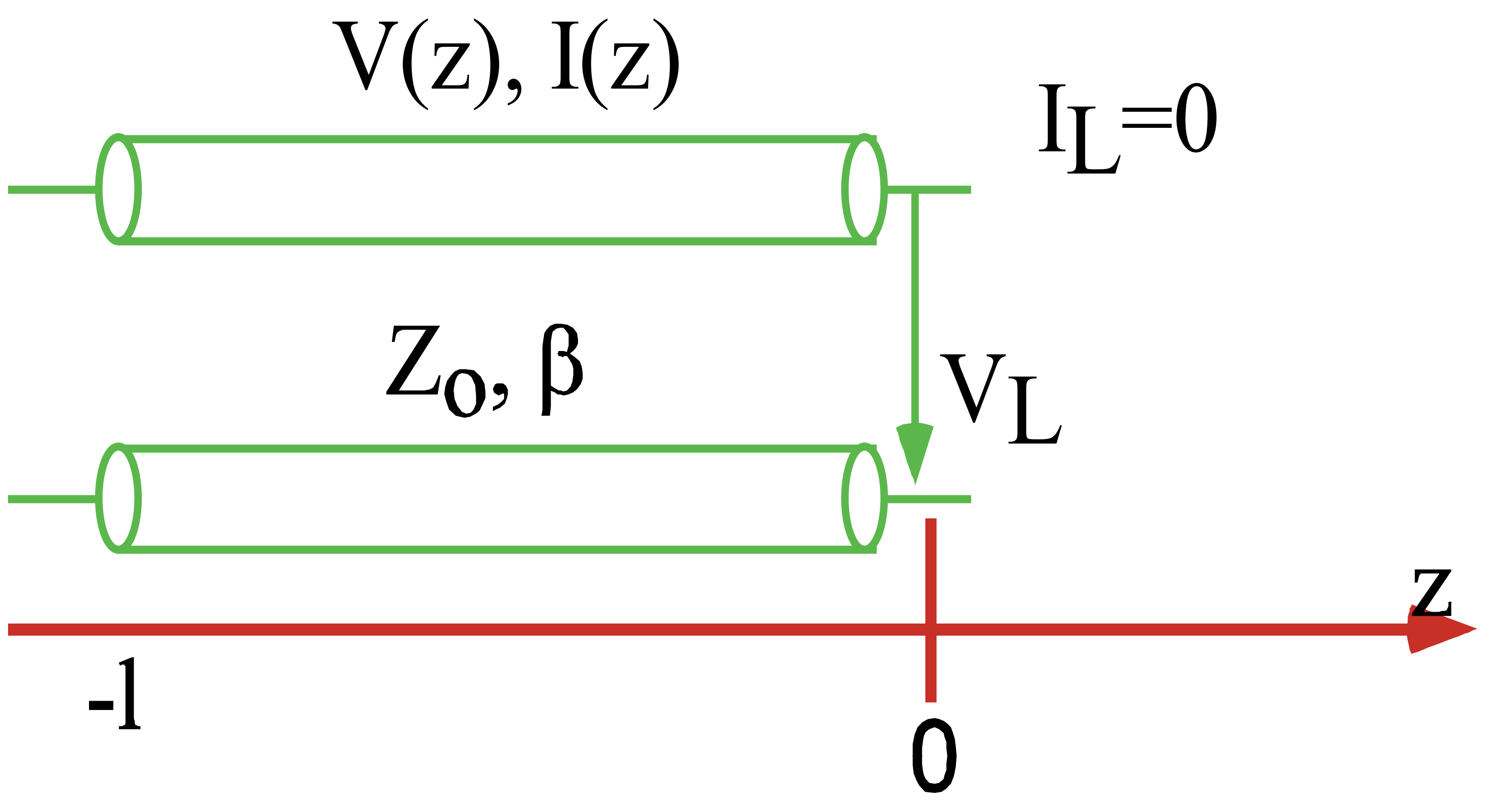
$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_o}\left(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}\right) = \frac{2V_0^+}{Z_o}\cos\beta z \quad \longrightarrow \quad Z_{in} = jZ_o \tan\beta z$$

Introduction aux microondes et antennes

Ligne terminée par un court circuit



Ligne terminée par un circuit ouvert



$$V(z) = V_0^+ \left(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z} \right) = 2V_0^+ \cos \beta z$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_o} \left(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z} \right) = \frac{-2jV_0^+}{Z_o} \sin \beta z$$

$\longrightarrow$

$$Z_{in} = -jZ_o \cot \beta z$$

Ligne terminée par un circuit ouvert